Cluster Variables on Double Bruhat Cells and Monomial Realizations of Crystal Bases (New Developments of Representation Theory and Harmonic Analysis)

金久保, 有輝

数理解析研究所講究録
第 1925 巻 2014 年 47-55

Cluster Variables on Double Bruhat Cells and Monomial Realizations of Crystal Bases

上智大学 理工学研究科　金久保 有輝
Yuki Kanakubo
Faculty of Science and Technology,
Sophia University

記号

G : simply connected semi simple algebraic group of rank r, B, B_- : opposite Borel subgroups, N, N_- : unipotent radicals, $H:=B\cap B_-$, W : Weyl group of G, ω_i : fundamental weight, $g:=Lie(G)$, $[1,i]:=\{1,2,\cdots,i\}$ (For $i\in\mathbb{Z}_{>0}$), $I:=[1,r]=\{1,\cdots,r\}$.

1 Introduction

1.1 Cluster algebra

1930 年代, totally positivity の研究が行われていた. Totally positivity とは, 全ての小行列式 (minor) が非負になる, という行列の性質のことである. この初等的な行列の性質の研究は, 1994 年に Lusztig によって一般化された. 小行列式は, 行列の集合の上の関数と見なすことができる. Lusztig は, この "行列の集合"を一般の "代数群 G"に, "小行列式"を "**generalized minor**" に置き換えて研究したのである. この研究の中で, 代数群 G の非交和分解

$$G=\coprod_{u,v\in W}G^{u,v},\ G^{u,v}:=BuB\cap B_-vB_-$$

が用いられた. 各 $G^{u,v}$ を, **Double Bruhat cell** と呼ぶ.

2002 年には, Fomin と Zelevinsky により, $G^{u,v}$ の座標環 $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ と generalized minors $\Delta(k,\mathbf{i})$ に関する予想が立てられた [3]. これは, $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ が generalized minors $\{\Delta(k,\mathbf{i})\}$ を生成元の一部に持ち, 他の生成元も exchange relation と呼ばれる関係式によって, $\{\Delta(k,\mathbf{i})\}$ から次々と生成される, という予想である. 他の代数多様体の座標環でも, このような性質を持つものが多く見つかっており, これらを統一的に扱うために **cluster algebra** が導入された. このとき, $\Delta(k,\mathbf{i})$ は **cluster variables** と呼ばれた.

1.2 Main results : Cluster variable and crystal

今回は, $G=SL_{r+1}(\mathbb{C})$ とし, generalized minors $\Delta(k,\mathbf{i})\in\mathbb{C}[G^{u,v}]$ を座標変換することを考える. 座標変換を施すと,

1. $\Delta(k,\mathbf{i})$ は, 係数 1 の Laurent 多項式となることがわかった.
2. 更にその各項を, ある crystal base $B(\lambda)$ の元として書き表すことができた.

二つ目の項目について, 少し詳しく説明しよう. $B(\lambda)$ は, 量子群 $U_q(g)$ の既約最高ウエイト表現 $V(\lambda)$ の $q=0$ における基底と考えることのできるもので, 作用素 $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ と絡んだ, 扱い易い性質を持っている (Sect. 4). $B(\lambda)$ の各元は, しばしば Young tableau によって表示され, これにより, $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ の作用やウエイトの勘

定を組合せ論的に扱うことができるようになる．それ以外にも $B(\lambda)$ の表示法は多く知られているが，今回は **monomial** 表示という方法を用いる．これは，$B(\lambda)$ の各元を Laurent 単項式で表示する方法である．$\Delta(k,\mathbf{i})$ を座標変換して得られた Laurent 多項式の各項が，ある crystal base を monomial 表示したものであることがわかったのである．この結果について紹介する．本研究は，上智大学の 中島俊樹 教授との共同研究である．

2 Generalized minors for A type

Generalized minor を定義しよう [4]. $G_0 = N_-HN$ を，Gaussian decomposition を持つような元 $x \in G$ 全体として定義される開部分集合とする．この分解は一意的であり，この分解に即して $x = [x]_-[x]_0[x]_+$, $[x]_- \in N_-$, $[x]_0 \in H$, $[x]_+ \in N$ と記すことにする．

定義 2.1. 各 $u,\ v \in W = \mathfrak{S}_{r+1}$ と $i \in [1,r]$ に対する **generalized minor** $\Delta_{u\omega_i,\ v\omega_i}$ とは，G 上の正則関数で，開部分集合 $\bar{u}G_0\bar{v}^{-1}$ へのその制限が

$$\Delta_{u\omega_i,\ v\omega_i}(x) = ([\bar{u}^{-1}x\bar{v}]_0)^{\omega_i}$$

で与えられるものである．

$G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ の場合，$\Delta_{u\omega_i,\ v\omega_i}(x)$ は次のようにして求めることができる:

命題 2.2. [4] ワイル群 $W = \mathfrak{S}_{r+1}$ の元 $u,\ v$ に対し，$\Delta_{u\omega_i,\ v\omega_i}$ の $x \in G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ での値 $\Delta_{u\omega_i,\ v\omega_i}(x)$ は，行が，集合 $u([1,i])$ の元，列が，集合 $v([1,i])$ の元でラベル付けされる x の小行列式として与えられる．

つまり，G が A 型の代数群の場合，generalized minors は普通の意味での minor(小行列式) に他ならないのである．例を見てみよう．

例 2.3. $r=3$, $u = s_1s_2s_3$, $v = s_1s_2$, $x = (x_{ij}) \in G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ のとき，$\Delta_{u\omega_2,\ v\omega_2}(x)$ は次のようにして求められる:

$$u[1,i] = s_1s_2s_3\{1,2\} = \{2,3\},\ v[1,i] = s_1s_2\{1,2\} = \{2,3\}$$

より，

$$\Delta_{u\omega_2,\ v\omega_2}(x) = \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32}$$

となる．

定義 2.4.

(1) $u = s_{i_1}\cdots s_{i_n}$, $v = s_{i_{n+1}}\cdots = s_{i_{n+m}}$ を，$u,\ v \in W$ の reduced expressions とする．このとき，(u,v) と，その reduced expressions に対する **reduced word** を

$$\mathbf{i} = (\bar{i_1},\cdots,\bar{i_n},i_{n+1},\cdots,i_{n+m})$$

で定める．ここに，$\bar{j}$ は形式的な記号である．

(2) $k \in [1,\ l(u)+l(v)]$ に対し，次のようにおく．

$$u_{\leq k} = u_{\leq k}(\mathbf{i}) := \begin{cases} s_{i_1}\cdots s_{i_k} & if\ k \leq n, \\ u & if\ k > n. \end{cases}$$

$$v_{>k} = v_{>k}(\mathbf{i}) := \begin{cases} s_{i_{n+m}} s_{i_{n+m-1}} \cdots s_{i_{k+1}} & if\ k \geq n \\ v^{-1} & if\ k < n. \end{cases}$$

以上の準備のもと, upper cluster algebra $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ の中で, cluster variables の役割をする $\Delta(k, \mathbf{i})$ を次のようにして定義する.

定義 2.5.

$$\Delta(k; \mathbf{i})(x) := \Delta_{u_{\leq k}\omega_{|i_k|},\ v_{>k}\omega_{|i_k|}}(x).$$

3 Double Bruhat cells and coordinate transformations

Introduction でも述べたように, double Bruhat cell は次のように定義される:

定義 3.1. ワイル群の二つの元 u, $v \in W$ に対し, $G^{u,v} := BuB \cap B_-vB_-$ を **double Bruhat cell**, $L^{u,v} := NuN \cap B_-vB_- \subset G^{u,v}$ を **reduced double Bruhat cell** という.

$G^{u,v}$, $L^{u,v}$ を座標変換することを考えよう. そのために, 次のように三つの行列を用意する.

$1 \leq i \leq r$ に対し

$$x_i(t) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i\text{行目} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & t & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{\bar{i}}(t) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i\text{行目} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & t & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$x_{-i}(t) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i\text{行目} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & t^{-1} & 0 & & \\ & & & 1 & t & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置く. u, $v \in W$, $\mathbf{i}$ を定義 2.4 のように取り, 写像 $\mathbf{x}^G_{\mathbf{i}} : H \times (\mathbb{C}^\times)^{n+m} \to G$ を

$$\mathbf{x}^G_{\mathbf{i}}(a, t_1, \cdots, t_n, t_{n+1}, \cdots, t_{n+m}) := a x_{\bar{i}_1}(t_1) \cdots x_{\bar{i}_n}(t_n) x_{i_{n+1}}(t_{n+1}) \cdots x_{i_{n+m}}(t_{n+m})$$

で定める. また, $\mathbf{x}^L_{\mathbf{i}} : (\mathbb{C}^\times)^{n+m} \to G$ を

$$\mathbf{x}^L_{\mathbf{i}}(t_1, \cdots, t_n, t_{n+1}, \cdots, t_{n+m}) := x_{-i_1}(t_1) \cdots x_{-i_n}(t_n) x_{i_{n+1}}(t_{n+1}) \cdots x_{i_{n+m}}(t_{n+m})$$

で定める. このとき, $G^{u,v}$, $L^{u,v}$ に関する次の同型対応が成り立つことが知られている:

定理 3.2. [2][3] ある $G^{u,v}$(resp. $L^{u,v}$) の Zariski open な部分集合 U(resp. U') があり, 次の双正則同型が成り立つ:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^G : H \times (\mathbb{C}^\times)^{n+m} \xrightarrow{\sim} U$$
$$(resp.\ \mathbf{x}_{\mathbf{i}}^L : (\mathbb{C}^\times)^{n+m} \xrightarrow{\sim} U')$$

となる.

この定理を用いて, $G^{u,v}$ 上の関数である $\Delta(k,\mathbf{i})$ を, $H \times (\mathbb{C}^\times)^{n+m}$, または $(\mathbb{C}^\times)^{n+m}$ 上の関数と見なすことにする:

定義 3.3. $a \in H$ と, $\mathbf{t}$, $\tau \in (\mathbb{C}^\times)^{n+m}$ に対し, $H \times (\mathbb{C}^\times)^{n+m}$ (resp. $(\mathbb{C}^\times)^{n+m}$) 上の関数 $\Delta^G(k,\mathbf{i})(a,\mathbf{t})$ (resp. $\Delta^L(k,\mathbf{i})(\tau)$) を

$$\Delta^G(k;\mathbf{i})(a,\mathbf{t}) := (\Delta(k;\mathbf{i}) \circ x_{\mathbf{i}}^G)(a,\mathbf{t}),$$
$$\Delta^L(k;\mathbf{i})(\tau) := (\Delta(k;\mathbf{i}) \circ x_{\mathbf{i}}^L)(\tau)$$

で定める.

4 Crystal

4.1 Crystal と, 量子群の表現論

一般に, crystal は次のように定義される [6]:

定義 4.1. $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を対称化可能な一般 Cartan 行列, $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を A の Cartan datum とする. Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ に付随する **crystal** とは, 集合 B と, 写像 $wt : B \to P$, $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i : B \to B \cup \{0\}$ と ε_i, $\varphi_i : B \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $(i \in I)$ との組で, 以下を満たすもののことである:
$b \in B$, $i \in I$ に対し,

1. $\varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) =< h_i,\ wt(b) >$,
2. $wt(\tilde{e}_i b) = wt(b) + \alpha_i$, if $\tilde{e}_i b \in B$,
3. $wt(\tilde{f}_i b) = wt(b) - \alpha_i$, if $\tilde{f}_i b \in B$,
4. $\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$, $\varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$ if $\tilde{e}_i b \in B$,
5. $\varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$, $\varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$ if $\tilde{f}_i b \in B$,
6. $\tilde{f}_i b = b' \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$, if $b,\ b' \in B$,
7. $\varphi_i(b) = -\infty,\ (b \in B) \Rightarrow \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$.

この定義は, 量子群 $U_q(g)$ の既約最高ウエイト表現 $V(\lambda)$ の crystal base $B(\lambda)$ の性質を一般化したものである. そこで, 量子群の表現論を簡単に復習しておこう. 詳細は [6] を参照して頂きたい.

$U_q(g)$ を Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ に付随し, $\mathbb{F}$ を基礎体とする量子群とする. $V(\lambda)$ (λ は dominant weight) を $U_q(g)$ の既約最高ウエイト表現, u_λ をその最高ウエイトベクトルとする. $V(\lambda)$ には **Kashiwara operators** $\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$ が作用する. これは, f_i, $e_i \in U_q(g)$ の作用を修正した作用素である (定義は [6]).

$V(\lambda)$ は $\mathbb{F}(q)$ 上のベクトル空間となる. $\mathbb{F}(q)$ の元で, $q = 0$ で正則なもの全体を $\mathbb{A}$ とおく. $L(\lambda)$ を, $\tilde{f}_{i_1}\tilde{f}_{i_2}\cdots\tilde{f}_{i_s}u_\lambda (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i_k \in I)$ で張られる $V(\lambda)$ の自由 $\mathbb{A}$ 部分加群とする. 更に集合 $B(\lambda)$ を,

$$B(\lambda) := \{\tilde{f}_{i_1}\tilde{f}_{i_2}\cdots\tilde{f}_{i_s}u_\lambda |\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i_k \in I\}$$

で定める. このとき, 次が成り立つ [6]:

1. $\tilde{e_i}L(\lambda) \subset L(\lambda)$, $\tilde{f_i}L(\lambda) \subset L(\lambda)$ $(i \in I)$,
2. $\tilde{e_i}B(\lambda) \subset B(\lambda) \cup \{0\}$, $\tilde{f_i}B(\lambda) \subset B(\lambda) \cup \{0\}$ $(i \in I)$,
3. $B(\lambda)$ は, $L(\lambda)/qL(\lambda)$ の $\mathbb{F}$ 基底となる.

$L(\lambda)/qL(\lambda)$ は, $V(\lambda)$ において, $q=0$ とした空間である. このように, $B(\lambda)$ は $V(\lambda)$ の $q=0$ における基底と考えることができるのである.

また, $i \in I$ に対し, 写像 $\varepsilon_i, \varphi_i : B \to \mathbb{Z}$ を

$$\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 |\ \tilde{e_i}^k b \in B\},$$

$$\varphi_i(b) = \max\{k \geq 0 |\ \tilde{f_i}^k b \in B\}$$

で定める. また, $wt : B \to P$ を, $b \in B_\mu := B(\lambda) \cap V(\lambda)_\mu$ のとき, $wt(b) = \mu$ として定める. このとき, $B = B(\lambda)$, $\tilde{f_i}$, $\tilde{e_i}$, ε_i, φ_i, wt は, crystal の公理 (定義 4.1, 1〜7) を満たす [6].

組 $(L(\lambda), B(\lambda))$ のことを, $V(\lambda)$ の **crystal base** と呼ぶ. このように, crystal は, crystal base を一般化した概念なのである.

最低ウエイト表現 $V^-(\lambda)$ に対しても, crystal base $(L^-(\lambda), B^-(\lambda))$ を構成することができ, これも crystal となる. ここに,

$$B^-(\lambda) := \{\tilde{e_{i_1}}\tilde{e_{i_2}} \cdots \tilde{e_{i_s}} u'_\lambda |\ s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i_k \in I\}$$

で, u'_λ は $V^-(\lambda)$ の最低ウエイトベクトルである. これと区別するために, 以下, $V(\lambda)$ のことを $V^+(\lambda)$, $(L(\lambda), B(\lambda))$ のことを $(L^+(\lambda), B^+(\lambda))$ と書くことにする.

4.2 Monomial realizations

$B^{\pm}(\lambda)$ を, $U_q(g)$-既約最高 (最低) ウエイト加群 $V^{\pm}(\lambda)$ に対する crystal bases とする. Young tableau を始め, crystal base の表示方法は多く知られている. 今回はその表示方法の一つである monomial realization に着目する. これは, $B^{\pm}(\lambda)$ の各元を Laurent 単項式で表し, Kashiwara operators $\tilde{e_i}$, $\tilde{f_i}$ の作用を Laurent 単項式の積で表すものであり ([1], [5]), 以下のように構成される:

$A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ を対称化可能な一般 Cartan 行列とする. $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を A の Cartan datum とする. 整数の集合 $p = (p_{i,j})_{i,j \in I,\ i \neq j}$ で, $p_{i,j} + p_{j,i} = 1$ を満たすようなものを一つ取り, 固定する.

$\mathcal{Y}$ の定義

変数の集合 $\{Y_{m,i} | i \in I,\ m \in \mathbb{Z}\}$ に対し, Laurent 単項式の集合 $\mathcal{Y}$ を

$$\mathcal{Y} := \{Y = \prod_{m \in \mathbb{Z},\ i \in I} Y_{m,i}^{l_{m,i}} | l_{m,i} \in \mathbb{Z},\ l_{m,i}\text{は有限個を除いて }0\}.$$

で定める.

写像 wt, ε_i, φ_i の定義

写像 $wt : \mathcal{Y} \to P$ と, $\varepsilon_i, \varphi_i : \mathcal{Y} \to \mathbb{Z}$, $(i \in I)$ を, 次のように定める:

$\mathcal{Y}$ の元 $Y = \prod_{m \in \mathbb{Z},\ i \in I} Y_{m,i}^{l_{m,i}}$ に対し,

$$wt(Y) = \sum_{i,m} l_{m,i}\Lambda_i,\ \varphi_i(Y) = \max\left\{\sum_{k \leq m} l_{k,i} | m \in \mathbb{Z}\right\},\ \varepsilon_i(Y) = \varphi_i(Y) - wt(Y)(h_i)$$

で定める.

<u>$\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ の定義</u>

$$A_{m,i} := Y_{m,i}Y_{m+1,i}\prod_{j\neq i} Y^{a_{j,i}}_{m+p_{j,i},j}$$

とおく.

Kashiwara operators $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ の $\mathcal{Y}$ への作用を, 次のように定める:

$$\tilde{f}_iY = \begin{cases} A^{-1}_{n_f,i}Y & if\ \varphi_i(Y) > 0 \\ 0 & if\ \varphi_i(Y) = 0, \end{cases} \tilde{e}_iY = \begin{cases} A_{n_e,i}Y & if\ \varepsilon_i(Y) > 0 \\ 0 & if\ \varepsilon_i(Y) = 0. \end{cases}$$

ここに, $n_f := \min\left\{ n|\varphi_i(Y) = \sum_{k\leq n} l_{k,i} \right\}$, $n_e := \max\left\{ n|\varphi_i(Y) = \sum_{k\leq n} l_{k,i} \right\}$ である.

定理 4.2. [1, 5]

(1) 上のように定めた $(\mathcal{Y}, wt, \varphi_i, \varepsilon_i, \tilde{f}_i, \tilde{e}_i)_{i\in I}$ は, crystal となる.

(2)$Y \in \mathcal{Y}$ が全ての $i \in I$ について $\varepsilon_i(Y) = 0$ を満たすなら, Y を含む連結成分は $B(wt(Y))$ に同型である.

例 4.3. $i_1, i_2, \cdots, i_n \in I$ とし, 無限列

$$\mathbf{j} = (i_1, i_2, i_3, \cdots),$$

を $i_k = i_l,\ if\ k \equiv l\ mod\ n$ で定める. この $\mathbf{j}$ から, 整数の集合 $(p_{k,l})$ を次のようにして定める:

$$p_{k,l} = \begin{cases} 1 & if\ i_k < i_l, \\ 0 & if\ i_l < i_k. \end{cases}$$

$\lambda = \beta\Lambda_d$ $(resp.\ \lambda = -\beta\Lambda_d)$, $(\beta \in \mathbb{Z}_{>0}, d \in I)$ に対し, Crystal $B^+(\lambda)$ $(resp.\ B^-(\lambda))$ を $\mathcal{Y}$ に以下のようにして埋め込むことができる:

$$v_\lambda \mapsto Y_{\beta+\gamma,d}Y_{\beta-1+\gamma,d}\cdots Y_{1+\gamma,d}, \quad (resp.\ v_\lambda \mapsto \frac{1}{Y_{\beta+\gamma,d}Y_{\beta-1+\gamma,d}\cdots Y_{1+\gamma,d}}),$$

ここに, v_λ は $B^+(\lambda)$ $(resp.\ B^-(\lambda))$ の highest (resp. lowest) weight vector で, γ は任意の整数である. この埋め込みを $\mu^+(\beta,\gamma)$ $(resp.\ \mu^-(\beta,\gamma))$ と記すことにする.

4.3 Demazure Crystal

ワイル群 W の元 w に対し, **Demazure crystal** $B^+(\lambda)_w$ が定められる. これは, crystal $B^+(\lambda)$ の部分集合で, 次のようにして定められる.

定義 4.4. v_λ を, $B^+(\lambda)$ の highest weight vector とする. ワイル群 W の単位元 e に対し, $B^+(\lambda)_e := \{v_\lambda\}$ と定める. $w \in W$ に対し, $s_iw < w$ のとき,

$$B^+(\lambda)_w := \{\tilde{f}_i^k b \mid k \geq 0,\ b \in B^+(\lambda)_{s_iw},\ \tilde{e}_ib = 0\} \setminus \{0\}$$

と定める.

同様にして, $B^-(\lambda)_w$ を次のようにして定める.

定義 4.5. v_λ を, $B^-(\lambda)$ の lowest weight vector とする. $B^-(\lambda)_e := \{v_\lambda\}$ と定める. $w \in W$ に対し, $s_i w < w$ のとき,

$$B^-(\lambda)_w := \{\tilde{e}_i^k b \mid k \geq 0,\ b \in B^-(\lambda)_{s_i w},\ \tilde{f}_i b = 0\} \setminus \{0\}$$

と定める.

5 Main result

以下, G が A 型代数群の場合, つまり $G = SL_{r+1}(\mathbb{C})$ の場合を考えていく.

5.1 $v = e$ の場合

ワイル群の元 $u, v \in W$ を次のようなものとして取ろう:

$$u = s_1 s_2 \cdots s_r s_1 \cdots s_{r-1} \cdots s_1 \cdots s_{r-m+2} s_1 \cdots s_{i_n},\ v = e.$$

これに応じて, u, v に対する reduced word $\mathbf{i}$ を

$$\mathbf{i} = (\underbrace{\bar{1}, \cdots, \bar{r}}_{1\text{ 周目}}, \underbrace{\bar{1}, \cdots, \overline{r-1}}_{2\text{ 周目}}, \cdots, \underbrace{\bar{1}, \cdots, \overline{r-m+2}}_{m-1\text{ 周目}}, \underbrace{\bar{1}, \cdots, \bar{i_n}}_{m\text{ 周目}})$$

で定める. $\mathbf{i}$ の中で, 左から k 番目の数を $\bar{i_k}$ とする. $\bar{i_k}$ が m' 周目に属するとする.

例 4.3 のように,

$$\mathbf{j} = (\underbrace{1, \cdots, r}_{1\text{ 周目}}, \underbrace{1, \cdots, (r-1)}_{2\text{ 周目}}, \cdots, \underbrace{1, \cdots, (r-m+2)}_{(m-1)\text{ 周目}}, \underbrace{1, \cdots, i_n}_{m\text{ 周目}})$$

に対して, $B^-(\lambda)$ $(\lambda = (m'-m)\Lambda_d)$ を $\beta = m - m'$, $\gamma = m' - 1$ として, $\mathcal{Y}$ へ埋め込む. 更に $l_0 := 0$, $l_1 := r$, $l_2 := r + (r-1), \cdots, l_m := r + (r-1) + \cdots + (r-m+1), \cdots,\ l_r := r + (r-1) + \cdots + 2 + 1$ とおき, 変数 $Y_{m,j}$ を, τ の変数 τ_{l_m+j} に変数変換する. これにより, $\{\tau_{l_m+j}\}$ を $\mathcal{Y}$ の元と見なす.

このとき, 次の定理が成り立つ:

定理 5.1. $i_k = d$ とする.

$$\Delta^L(k; \mathbf{i})(\tau) = \sum_{x \in B^-(\lambda)_{u_{\leq k}}} \mu^-(m-m', m'-1)(x), \quad \lambda := (m'-m)\Lambda_d$$

が成り立つ.

このように, generalized minor を座標変換したところ, 各項を, ある Demazure crystal の元で書き表すことができた.

例 5.2. $u = s_1 s_2 s_3 s_4 s_1 s_2 s_3 s_1$, $v = e$, $\mathbf{i} = (-1, -2, -3, -4, -1, -2, -3, -1)$ とする. 定理 3.2, 命題 2.2 を用いて計算をすると,

$$\Delta^L(1; \mathbf{i})(\tau) = \frac{\tau_1 \tau_5}{\tau_2 \tau_6} + \frac{\tau_1}{\tau_2 \tau_8} + \frac{1}{\tau_5 \tau_8},$$

となる．

一方, 今は A 型の場合を考えているので, 一般 Cartan 行列 $A=(a_{ij})$ は, $a_{i,i+1}=a_{i,i-1}=-1$, $a_{ij}=0$, $(|i-j|>1)$ を満たす．これと $\tilde{e}_i$ の作用の定義から

$$\tilde{e}_1\frac{1}{\tau_5\tau_8}=\frac{\tau_1\tau_5}{\tau_2}\frac{1}{\tau_5\tau_8}=\frac{\tau_1}{\tau_2\tau_8},$$

$$\tilde{e}_1\tilde{e}_1\frac{1}{\tau_5\tau_8}=\tilde{e}_1\frac{\tau_1}{\tau_2\tau_8}=\frac{\tau_5\tau_8}{\tau_6}\frac{\tau_1}{\tau_2\tau_8}=\frac{\tau_1\tau_5}{\tau_2\tau_6}$$

である．よって,

$$\Delta^L(1;\mathbf{i})(\tau)=\tilde{e}_1\tilde{e}_1\frac{1}{\tau_5\tau_8}+\tilde{e}_1\frac{1}{\tau_5\tau_8}+\frac{1}{\tau_5\tau_8}=\sum_{x\in B^-(-2\Lambda_1)_{s_1}}\mu^-(2,0)(x)$$

となる．この場合, $\frac{1}{\tau_5\tau_8}$ が, ウエイト $-2\Lambda_1$ を持つ最低ウエイトベクトルである．

5.2 v が一般の場合

u は, $u=s_1s_2\cdots s_rs_1\cdots s_{r-1}\cdots s_1\cdots s_{r-m+2}s_1\cdots s_{i_{n_u}}$ ととる．これに対し, v は u と順番を逆にして, $v=s_{i'_{n_v}}\cdots s_1s_{r-m+2}\cdots s_1\cdots s_{r-1}\cdots s_1s_r\cdots s_2s_1$ ととる．

これに対応して, (u,v) の reduced word $\mathbf{i}$ を

$$\mathbf{i}=(\underbrace{\bar{1},\cdots,\bar{r}}_{1\text{ 周目}},\underbrace{\bar{1},\cdots,\overline{r-1}}_{2\text{ 周目}},\cdots,\underbrace{\bar{1},\cdots,\overline{r-m_u+2}}_{m_u-1\text{ 周目}},\underbrace{\bar{1},\cdots,\overline{i_{n_u}}}_{m_u\text{周目}},$$
$$\underbrace{i'_{n_v},\cdots,1}_{m_u+1\text{ 周目}},\underbrace{(r-m_v+2),\cdots,1}_{m_u+2\text{ 周目}},\cdots,\underbrace{(r-1),\cdots,1}_{m_u+m_v-1\text{ 周目}},\underbrace{r,\cdots,1}_{m_u+m_v\text{周目}})\qquad(2)$$

と設定する．k が m' 周目に属するとする．

まず, 新たな関数 $\hat{\Delta}^L(k;\mathbf{i})(\tau)$ を定義する．これは, $\Delta^L(k;\mathbf{i})(\tau)$ を修正したものであり, 変数変換を施すことで, $\Delta^L(k;\mathbf{i})(\tau)$ や $\Delta^G(k;\mathbf{i})(a,\mathbf{t})$ と一致する．

$\Delta^L(k;\mathbf{i})(\tau)$ を求めるためには, 行列

$$x_{-1}(\tau_1)x_{-2}(\tau_2)\cdots x_{i_{n_u}}(\tau_{n_u})x_{i'_{n_v}}(\tau_{n_u+1})\cdots x_2(\tau_{n_u+n_v-1})x_1(\tau_{n_u+n_v})\qquad(3)$$

の, 行 $u_{\leq k}\{1,\cdots,d\}$, 列 $v_{>k}\{1,\cdots,d\}$ で作られる小行列式であった．(定理 3.2, 命題 2.2).

そこで, 新たに行列 $x_{\widehat{i}}(\tau_j)$, $(i>0)$ を

$$x_{\widehat{i}}(\tau_j):=\begin{array}{r}\\ \\ \\ i\text{ 行目}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&0&&&&&\\0&1&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&\tau_j&1&&\\&&&0&\tau_j^{-1}&&\\&&&&&\ddots&&\\&&&&&&1&0\\&&&&&&0&1\end{pmatrix}$$

で定義し, (3) の積の中の $x_i(\tau_j)$, $(i>0, n_u+1\le j\le n_u+n_v)$ を全て $x_{\widehat{i}}(\tau_j)$ で置き換えた

$$x_{-1}(\tau_1)x_{-2}(\tau_2)\cdots x_{i_{n_u}}(\tau_{n_u})x_{\widehat{i'_{n_v}}}(\tau_{n_u+1})\cdots x_{\widehat{2}}(\tau_{n_u+n_v-1})x_{\widehat{1}}(\tau_{n_u+n_v}) \tag{4}$$

という行列を考える. 関数 $\hat{\Delta}^L(k;\mathbf{i})(\tau)$ を次のように定義する:

定義 5.3. $\hat{\Delta}^L(k;\mathbf{i})(\tau)$ を, 行列 (4) の, 行 $u_{\le k}\{1,\cdots,d\}$, 列 $v_{>k}\{1,\cdots,d\}$ で作られる小行列式として定めることにする.

定義 5.4. Dominant weight λ と, ワイル群の元 u, $v\in W$ に対し, Double Demazure crystal $B_{u,v}(\lambda)$ を

$$B_{u,v}(\lambda) := B^+(\lambda)_u \cap B^-(\lambda)_v$$

で定める.

$\mathbb{Z}^d$ 上の半順序 $\le$ を, $a=(a_1,\cdots,a_d)$, $b=(b_1,\cdots,b_d)$ に対し,

$$a\le b \Leftrightarrow a_i\le b_i,\ for\ all\ i$$

で定める. $m_0 := min(m_v, m')$, $\alpha := (1,2,\cdots,d)$, $\beta := (m_0+1, m_0+2,\cdots,m_0+d)$ とおくとき, 次が成り立つ.

定理 5.5. $i_k=d$, $(1\le k\le n_u)$ とする. 各 $\xi\in\mathbb{Z}^d$, $(\alpha\le\xi\le\beta)$ に対し, ある dominant weights λ_ξ, λ'_ξ と, u_ξ, $v_\xi\in W$ $(u_\xi\le u,\ v_\xi\le v)$ と, $Z_\xi\in\mathcal{Y}$, そして埋め込み $M: B_{v^{-1},v_\xi}(\lambda_\xi)\to\mathcal{Y}$, $M': B_{u_{\le k},u_\xi}(\lambda'_\xi)\to\mathcal{Y}$ が存在し,

$$\hat{\Delta}^L(k;\mathbf{i})(\tau) = \sum_{\alpha\le\xi\le\beta}\left(\Big(\sum_{x\in B_{v^{-1},v_\xi}(\lambda_\xi)} M(x)\Big) Z_\xi \Big(\sum_{y\in B_{u_{\le k},u_\xi}(\lambda'_\xi)} M'(y)\Big)\right)$$

となる.

定理 5.6. $\Delta^G(k;\mathbf{i})(a,\mathbf{t})$, $\Delta^L(k;\mathbf{i})(\tau)$ は, $\hat{\Delta}^L(k;\mathbf{i})(\tau)$ に適当に変数変換を施すことで, 得ることができる.

参考文献

[1] Nakajima H, t-analogs of quantum affine algebras of type A_n and D_n, Contemp. Math, 325, AMS, Providence, RI, 141—160 (2003).

[2] Arkady Berenstein and Andrei Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. 143 No. 1, 77—128 (2001).

[3] Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky, Cluster Algebras 1 : Foundations. JAMS vol.15, No 2, 497-529 (2002).

[4] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky, Cluster algebras 3 : Upper bounds and double bruhat cells. Duke Mathematical Journal vol. 126 No1, 1—52 (2005).

[5] Kashiwara M. Realizations of crystals. Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001).

[6] Kashiwara M. On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras. Duke Mathematical Journal vol. 63, No. 2.(1991)